CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
OD ROKU SZKOLNEGO 2014/2015

MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY

ROZWIĄZANIA ZADAŃ I SCHEMATY PUNKTOWANIA
(A1, A2, A3, A4, A6, A7)

GRUDZIEŃ 2014

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5
Odpowiedź	A	C	D	C	B

Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**

Zadanie 1. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	R3.4. Zdający stosuje twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x-a$.

Poprawna odpowiedź: A

Zadanie 2. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	R8.5., 4.5. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności, rysuje wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru.

Poprawna odpowiedź: C

Zadanie 3. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	R11.4. Zdający korzysta z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji.

Poprawna odpowiedź: D

Zadanie 4. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	R6.4. Zdający posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych (np. przy rozwiązywaniu nierówności typu $\sin x > a, \cos x \le a, \operatorname{tg} x > a$).

Poprawna odpowiedź: C

Zadanie 5. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.4., 4.3. Zdający na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y=f(x+a)$, $y=f(x)+a$, $y=-f(x)$, $y=f(-x)$; odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą).

Poprawna odpowiedź: B

Zadanie 6. (0–2) – zadanie kodowane

IV. Użycie i tworzenie strategii	G6.6., 2.1. Zdający wyłącza wspólny czynnik z wyrazów sumy algebraicznej poza nawias, używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Poprawna odpowiedź: 210

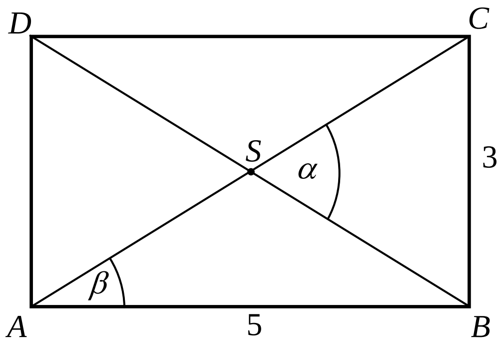
Zadanie 7. (0–2)

Długości boków prostokąta są równe 3 oraz 5. Oblicz sinus kąta ostrego, który tworzą przekątne tego prostokąta.

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	6.1., R6.5. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°, stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów.

Rozwiązanie (I sposób):

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wtedy $\alpha = 2\beta$. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $AC = \sqrt{34}$.

Ponieważ $\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{34}}$ oraz $\cos\beta = \frac{5}{\sqrt{34}}$, więc

$$\sin\alpha = 2\sin\beta\cos\beta = 2\cdot\frac{3}{\sqrt{34}}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{15}{17}$$

Rozwiązanie (II sposób):

Przekątna tego prostokąta ma długość $\sqrt{34}$. Niech α oznacza kąt ostry między przekątnymi tego prostokąta.

Obliczamy pole P prostokąta dwoma sposobami:

$$P = 3\cdot 5 = 15,\ P = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{34}}{2}\cdot\frac{\sqrt{34}}{2}\cdot\sin\alpha = 17\sin\alpha.$$

Stąd $\sin\alpha = \frac{15}{17}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje – 1 pkt
jeżeli:

poda wartość $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{\sqrt{34}}$ i $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{\sqrt{34}}$

albo

poda sposób obliczenia pola prostokąta przy wykorzystaniu $\sin\alpha$.

Zdający otrzymuje – 2 pkt
jeżeli obliczy $\sin\alpha=\frac{15}{17}$.

Zadanie 8. (0–2)

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+2}-\frac{(n+2)^2}{n+444}\right)$.

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	R11.1. Zdający oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych.

Rozwiązanie:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+2}-\frac{(n+2)^2}{n+444}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2(n+444)-(n+2)^3}{(n+2)(n+444)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{438n^2-12n-8}{(n+2)(n+444)}=438$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje – 1 pkt

jeżeli poprawnie zapisze wyrażenie $\frac{n^2}{n+2}-\frac{(n+2)^2}{n+444}$ w postaci ułamka, np. $\frac{438n^2-12n-8}{(n+2)(n+444)}$.

Zdający otrzymuje – 2 pkt
jeżeli poprawnie obliczy wartość granicy.

Zadanie 9. (0–2)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{x^2}{x-4}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x\neq 4$. Oblicz pochodną funkcji f w punkcie $x=12$.

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	R11.2. Zdający oblicza pochodne funkcji wymiernych.

Rozwiązanie:

$$f'(x)=\frac{2x(x-4)-x^2}{(x-4)^2}=\frac{x^2-8x}{(x-4)^2},$$

$$f'(12)=\frac{144-96}{64}=\frac{3}{4}.$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje – 1 pkt

gdy poprawnie poda wzór funkcji f', np. $f'(x)=\frac{2x(x-4)-x^2}{(x-4)^2}$

Zdający otrzymuje – 2 pkt

gdy obliczy wartość pochodnej dla $x=12$: $f'(12)=\frac{3}{4}$

Zadanie 10. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=x^4$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równanie prostej stycznej do wykresu funkcji f, która jest równoległa do prostej $y=4x+7$.

IV. Użycie i tworzenie strategii	R11.3. Zdający korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej.

Rozwiązanie:

Styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest prostą o równaniu

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

Obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x)=4x^3$$

Ponieważ styczna jest równoległa do prostej o równaniu $y=4x+7$, więc $f'(x_0)=4$.

Zatem $x_0=1$ i styczna ma równanie

$$y-1=4(x-1),\text{ czyli } y=4x-3.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp – 1 p.

Obliczenie pochodnej funkcji *f*: $f'(x) = 4x^3$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania – 2 p.

Obliczenie pierwszej współrzędnej punktu styczności: $x_0 = 1$.

Rozwiązanie pełne – 3 p.

Zapisanie równania stycznej w postaci np. $y = 4x - 3$.

Zadanie 11. (0–3)

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste *x*, spełniające równanie $\sin 5x - \sin x = 0$.

IV. Użycie i tworzenie strategii	R6.5. Zdający stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów.

Rozwiązanie (I sposób):

Korzystamy ze wzoru na różnicę sinusów i zapisujemy równanie w postaci

$$2\sin 2x \cos 3x = 0$$

zatem

$$\sin 2x = 0 \text{ lub } \cos 3x = 0$$

stąd otrzymujemy kolejno:

$\sin 2x = 0$, gdy $2x = k\pi$ czyli $x = \frac{k\pi}{2}$, gdzie *k* jest liczbą całkowitą,

$\cos 3x = 0$, gdy $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ czyli $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, gdzie *k* jest liczbą całkowitą.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp – 1 p.

Zapisanie równania w postaci iloczynowej np. $\sin 2x \cos 3x = 0$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania – 2 p.

Zapisanie rozwiązań równania

- $\sin 2x = 0$: $x = \frac{k\pi}{2}$, gdzie *k* jest liczbą całkowitą

albo

- $\cos 3x = 0$: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, gdzie *k* jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie pełne – 3 p.

Zapisanie wszystkich rozwiązań równania $\sin 5x - \sin x = 0$: $x = \frac{k\pi}{2}$ lub $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, gdzie *k* jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie (II sposób):
Zapisujemy równanie w postaci $\sin 5x = \sin x$.
Z własności funkcji sinus wynika, że
$5x = x + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą
lub
$5x = \pi - x + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą,
zatem
$4x = 2k\pi$, czyli $x = \frac{k\pi}{2}$, gdzie k jest liczbą całkowitą
lub
$6x = \pi + 2k\pi$, czyli $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp – 1 p.

Zapisanie jednej z zależności: $5x = x + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą lub $5x = \pi - x + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania – 2 p.

Zapisanie obu zależności: $5x = x + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą oraz $5x = \pi - x + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie pełne – 3 p.

Zapisanie wszystkich rozwiązań równania $\sin 5x - \sin x = 0$: $x = \frac{k\pi}{2}$ lub $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Uwagi
1. Jeżeli zdający zapisze jedynie $5x = x$, to otrzymuje 0 punktów.
2. Jeżeli zdający zapisze $5x = x$ oraz $5x = \pi - x$, to otrzymuje 1 punkt.
3. Jeżeli zdający zapisze tylko jedną z zależności $5x = x + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą lub $5x = \pi - x + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą i w rezultacie uzyska tylko jedną serię rozwiązań: $x = \frac{k\pi}{2}$ albo $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, gdzie k jest liczbą całkowitą, to otrzymuje 2 punkty.

Zadanie 12. (0–3)

Niech P_n oznacza pole koła o promieniu $\frac{1}{2^n}$, dla $n \geq 1$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (P_n).

IV. Użycie i tworzenie strategii	R5.3. Zdający rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

Rozwiązanie:

Pole koła o promieniu $r_n = \frac{1}{2^n}$ jest równe $\pi \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{\pi}{4^n}$, czyli $P_n = \frac{\pi}{4^n}$. Dla $n \geq 1$ zachodzi równość $\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{1}{4}$. Wynika stąd, że (P_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q = \frac{1}{4}$ i pierwszym wyrazie $P_1 = \frac{\pi}{4}$. Ponieważ $-1 < \frac{1}{4} < 1$, więc suma S wszystkich wyrazów ciągu (P_n) jest skończona i jest równa

$$S = \frac{P_1}{1-q} = \frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{3}$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 p.

Obliczenie pierwszego wyrazu i ilorazu ciągu (P_n): $P_1 = \frac{\pi}{4}$, $q = \frac{1}{4}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Stwierdzenie, że istnieje skończona suma wszystkich wyrazów ciągu (P_n), np.: $|q| = \frac{1}{4} < 1$

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Obliczenie sumy S wszystkich wyrazów ciągu (P_n): $S = \frac{\pi}{3}$

Uwaga:

Jeżeli zdający obliczy sumę wszystkich wyrazów ciągu (P_n), ale nie stwierdzi, że $|q| < 1$, to otrzymuje 2 punkty.

Zadanie 13. (0–3)

Wykaż, że jeżeli $a > b \geq 1$, to $\frac{a}{2+a^3} < \frac{b}{2+b^3}$.

V. Rozumowanie i argumentacja	R2.6. Zdający dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; rozszerza i (w łatwych przypadkach) skraca wyrażenia wymierne.

Rozwiązanie (I sposób):

Przekształcamy nierówność $\frac{a}{2+a^3} < \frac{b}{2+b^3}$ równoważnie.

$$2a + ab^3 < 2b + a^3b,$$

$$2(a-b) < ab\left(a^2 - b^2\right),$$

$$2(a-b) < ab(a-b)(a+b).$$

Ponieważ $a > b$, więc możemy obie strony tej nierówności podzielić przez $a - b > 0$.
Otrzymujemy

$$2 < ab(a+b).$$

Ponieważ $a > b \geq 1$, to $ab > 1$ oraz $a + b > 2$, zatem $ab(a+b) > 1 \cdot 2 = 2$. To kończy dowód.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp – 1 p.

Zapisanie nierówności $\frac{a}{2+a^3} < \frac{b}{2+b^3}$ w postaci $2(a-b) < ab\left(a^2 - b^2\right)$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania – 2 p.

Stwierdzenie, że dla $a > b \geq 1$ nierówność $\frac{a}{2+a^3} < \frac{b}{2+b^3}$ jest równoważna nierówności $2 < ab(a+b)$

Uwaga:

Zdający zamiast podzielić obie strony nierówności przez $a - b > 0$, może zapisać nierówność w postaci równoważnej $(a-b)\left(ab(a+b) - 2\right) > 0$

Rozwiązanie pełne – 3 p.

Przeprowadzenie pełnego dowodu.

Rozwiązanie (II sposób):

Definiujemy funkcję *f* określoną wzorem $f(x) = \frac{x}{2+x^3}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq -\sqrt[3]{2}$.

Obliczamy pochodną funkcji *f*: $f'(x) = \frac{2\left(1-x^3\right)}{\left(2+x^3\right)^2}$

Stwierdzamy, że $f'(x)<0$ dla $x\in(1,+\infty)$. Wynika stąd, że w przedziale $\langle 1,+\infty)$ funkcja *f* jest malejąca. Zatem dla dowolnych dwóch argumentów $a>b$ z tego przedziału prawdziwa jest nierówność $f(a)<f(b)$, czyli $\frac{a}{2+a^3}<\frac{b}{2+b^3}$, co należało udowodnić.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp – 1 p.

Określenie funkcji $f(x)=\frac{x}{2+x^3}$ i obliczenie jej pochodnej $f'(x)=\frac{2\left(1-x^3\right)}{\left(2+x^3\right)^2}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania – 2 p.

Określenie znaku pochodnej funkcji *f* w przedziale $(1,+\infty)$: $f'(x)<0$ dla $x\in(1,+\infty)$

Rozwiązanie pełne – 3 p.

Stwierdzenie, że w przedziale $\langle 1,+\infty)$ funkcja *f* jest malejąca i wywnioskowanie prawdziwości tezy.

Zadanie 14. (0–4)

Wykaż, że jeżeli α,β,γ są kątami wewnętrznymi trójkąta i $\sin^2\alpha+\sin^2\beta<\sin^2\gamma$, to $\cos\gamma<0$.

V. Rozumowanie i argumentacja	R7.5. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Rozwiązanie (I sposób):

Niech a,b,c oznaczają długości boków trójkąta leżących naprzeciwko kątów, odpowiednio, α,β,γ, i niech R będzie promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie. Z twierdzenia sinusów otrzymujemy

$$\sin\alpha=\frac{a}{2R},\ \sin\beta=\frac{b}{2R},\ \sin\gamma=\frac{c}{2R}.$$

Zatem nierówność $\sin^2\alpha+\sin^2\beta<\sin^2\gamma$ możemy zapisać w postaci

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2<\left(\frac{c}{2R}\right)^2.$$

Stąd $a^2+b^2<c^2$, czyli $a^2+b^2-c^2<0$. Zatem z twierdzenia cosinusów otrzymujemy

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0.$$

Uwaga:

Zamiast wykorzystać twierdzenie sinusów możemy również skorzystać ze wzoru na pole trójkąta i wówczas otrzymujemy

$$\sin\alpha = \frac{2P}{bc}\ ,\ \sin\beta = \frac{2P}{ac},\ \sin\gamma = \frac{2P}{ab}$$

Dalsza część rozwiązania przebiega tak samo.

<u>Schemat oceniania:</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania – 1 p.

Zastosowanie

- twierdzenia sinusów, np. zapisanie równości: $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, $\sin\beta = \frac{b}{2R}$, $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$

albo

- wzoru na pole trójkąta i zapisanie równości: $\sin\alpha = \frac{2P}{bc}$, $\sin\beta = \frac{2P}{ac}$, $\sin\gamma = \frac{2P}{ab}$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp – 2 p.

Zapisanie nierówności $a^2 + b^2 - c^2 < 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania – 3 p.

Zastosowanie twierdzenia cosinusów do zapisania równości $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Rozwiązanie pełne – 4 p.

Poprawne uzasadnienie, że $\cos\gamma < 0$.

Uwaga:

Jeżeli zdający zauważy, że z nierówności $a^2 + b^2 < c^2$ wynika, że trójkąt jest rozwartokątny oraz γ jest kątem rozwartym, a stąd $\cos\gamma < 0$, to otrzymuje **4 punkty**.

Rozwiązanie (II sposób):

Ponieważ $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, więc $\sin\gamma = \sin\left(180^\circ - (\alpha + \beta)\right) = \sin(\alpha + \beta)$. Nierówność $\sin^2\alpha + \sin^2\beta < \sin^2\gamma$ możemy zapisać w postaci

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta < \sin^2(\alpha + \beta).$$

Ze wzoru na sinus sumy kątów otrzymujemy

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta<(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2$$

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta<\sin^2\alpha\cos^2\beta+2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta$$

$$\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta<2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin^2\alpha\left(1-\cos^2\beta\right)+\sin^2\beta\left(1-\cos^2\alpha\right)<2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\beta\sin^2\alpha<2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta$$

$$2\sin^2\alpha\sin^2\beta<2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin^2\alpha\sin^2\beta<\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta$$

Obie strony nierówności możemy podzielić przez $\sin\alpha\sin\beta>0$, otrzymując

$$\sin\alpha\sin\beta<\cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta>0$$

$$\cos(\alpha+\beta)>0$$

Stąd wynika, że $\alpha+\beta<90^\circ$, więc $\gamma>90^\circ$. To oznacza, że $\cos\gamma<0$, co kończy dowód.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania – 1 p.

Doprowadzenie nierówności do postaci $\sin^2\alpha+\sin^2\beta<\sin^2(\alpha+\beta)$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp – 2 p.

Doprowadzenie nierówności do postaci

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta<\sin^2\alpha\cos^2\beta+2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania – 3 p.

Doprowadzenie nierówności do postaci $\cos(\alpha+\beta)>0$

Rozwiązanie pełne – 4 p.

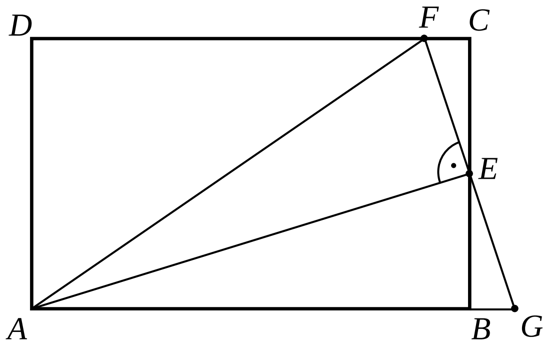
Poprawne uzasadnienie, że $\cos\gamma<0$.

Zadanie 15. (0–4)
Punkt E jest środkiem boku BC prostokąta $ABCD$, w którym $AB > BC$. Punkt F leży na boku CD tego prostokąta oraz $\sphericalangle AEF = 90^\circ$. Udowodnij, że $\sphericalangle BAE = \sphericalangle EAF$.

V. Rozumowanie i argumentacja	G10.14. Zdający stosuje cechy przystawania trójkątów.

Rozwiązanie (I sposób):

Przedłużamy odcinki AB i EF do przecięcia w punkcie G.



Trójkąty ECF i EBG są przystające (oba są prostokątne, kąty CEF i BEG są równe, gdyż są wierzchołkowe oraz $CE = BE$), skąd $EF = EG$. Zatem trójkąty AEF i AEG są przystające (oba są prostokątne, AE jest ich wspólną przyprostokątną i przyprostokątne EF i EG mają tę samą długość). Zatem $\sphericalangle EAF = \sphericalangle EAB$, co kończy dowód.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp – 1 p.

Zapisanie, że trójkąty ECF i EBG są przystające.

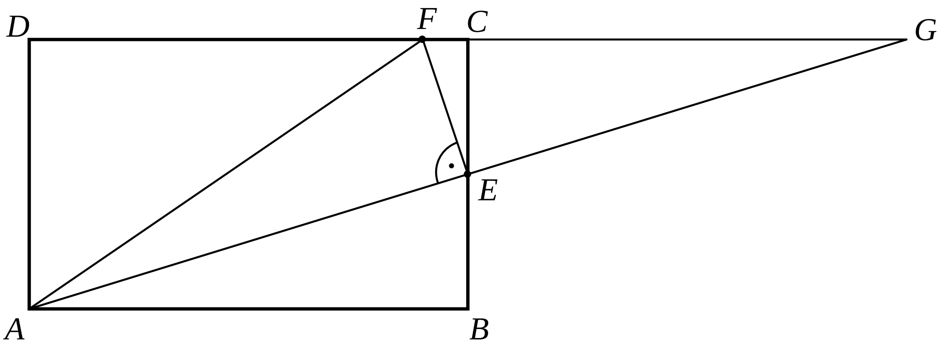
Pokonanie zasadniczych trudności zadania – 2 p.

Zapisanie, że trójkąty AEF i AEG są przystające.

Rozwiązanie pełne – 3 p.

Zapisanie, że $\sphericalangle EAF = \sphericalangle EAB$.

Rozwiązanie (II sposób):
Przedłużamy odcinki AE i DC do przecięcia w punkcie G.



Trójkąty ABE i GCE są przystające (oba są prostokątne, kąty CEG i BEA są równe, gdyż są wierzchołkowe oraz $CE = BE$), skąd $AE = GE$ oraz $\sphericalangle EGC = \sphericalangle EAB$. Prosta EF jest więc symetralną odcinka AG. Zatem $AF = FG$. Trójkąt AGF jest więc równoramienny, czyli $\sphericalangle EAF = \sphericalangle EGF = \sphericalangle EAB$. To kończy dowód.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp – 1 p.

Zapisanie, że trójkąty ABE i GCE są przystające.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania – 2 p.

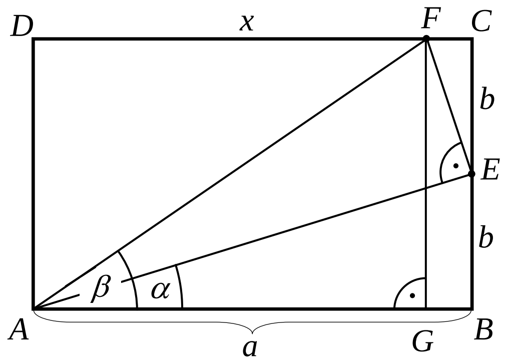
Zapisanie, że $\sphericalangle EGF = \sphericalangle EAB$.

Rozwiązanie pełne – 3 p.

Zapisanie, że $\sphericalangle EAF = \sphericalangle EAB$.

Rozwiązanie (III sposób):

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Trójkąt ABE jest prostokątny, więc $\sphericalangle AEB = 90° - \alpha$, kąt AEF jest prosty, więc $\sphericalangle CEF = 180° - (90° - \alpha) - 90° = \alpha$. Zatem trójkąty ABE i ECF są podobne, skąd

$$\frac{FC}{EC} = \frac{BE}{AB}, \text{ czyli } \frac{a-x}{b} = \frac{b}{a}.$$

Stąd $x = \dfrac{a^2 - b^2}{a}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów ABE i ADF otrzymujemy

$$AE = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ oraz } AF = \sqrt{x^2 + (2b)^2}$$

zatem

$$AF = \sqrt{x^2 + 4b^2} = \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{a}\right)^2 + 4b^2} = \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}{a^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2}} = \frac{a^2 + b^2}{a}$$

stąd otrzymujemy

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ oraz } \cos\beta = \frac{AG}{AF} = \frac{x}{AF} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

Następnie $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{a^2}{a^2+b^2} - 1 = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \cos\beta$, czyli $2\alpha = \beta$, co należało udowodnić.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania:

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 p.

Zapisanie, że $\cos\beta = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

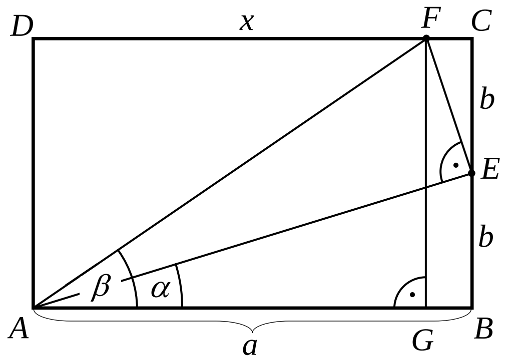
Zapisanie, że $\cos\beta = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ oraz $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Zapisanie, że $\cos\beta = \cos 2\alpha$.

Rozwiązanie (IV sposób):

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Trójkąt *ABE* jest prostokątny, więc $\sphericalangle AEB = 90° - \alpha$, kąt *AEF* jest prosty, więc $\sphericalangle CEF = 180° - (90° - \alpha) - 90° = \alpha$. Zatem trójkąty *ABE* i *ECF* są podobne, skąd

$$\frac{FC}{EC} = \frac{BE}{AB}, \text{ czyli } \frac{a-x}{b} = \frac{b}{a}$$

Stąd $x = \frac{a^2-b^2}{a}$

Z trójkątów *ABE* i *AGF* otrzymujemy

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{b}{a} \text{ oraz } \mathrm{tg}\beta = \frac{2b}{x} = \frac{2b}{\frac{a^2-b^2}{a}} = \frac{2ab}{a^2-b^2}$$

Zauważmy, że $\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{b}{a}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\frac{2b}{a}}{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \frac{2ab}{a^2-b^2} = \mathrm{tg}\beta$, czyli $2\alpha = \beta$

To należało udowodnić.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp – 1 p.

Zapisanie, że $\mathrm{tg}\beta = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania – 2 p.

Zapisanie, że $\mathrm{tg}\beta = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$ oraz $\mathrm{tg}\alpha = \frac{b}{a}$

Rozwiązanie pełne – 3 p.

Zapisanie, że $\mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}2\alpha$

Zadanie 16. (0–5)
Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że w trzykrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry otrzymamy co najmniej jedną „jedynkę”, pod warunkiem, że otrzymamy co najmniej jedną „szóstkę”.

III. Modelowanie matematyczne	R10.2. Zdający oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.

Rozwiązanie:

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie trzywyrazowe ciągi o wyrazach ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6\}$ (czyli trójelementowe wariacje z powtórzeniami tego zbioru). Jest to model klasyczny. $|\Omega| = 6^3 = 216$.

Wprowadźmy oznaczenia dla zdarzeń
A – otrzymamy co najmniej raz jedno oczko,
B – otrzymamy co najmniej raz sześć oczek.

Mamy obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe $P(A\,|\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$.

Moc zdarzenia B obliczymy, korzystając z pojęcia zdarzenia przeciwnego, które polega na tym, że nie otrzymamy ani razu sześciu oczek.

$$|B| = |\Omega| - |B'| = 6^3 - 5^3 = 216 - 125 = 91.$$

Zdarzenie $A \cap B$ jest sumą parami rozłącznych zdarzeń:

- otrzymamy raz jedno oczko, raz sześć oczek i raz liczbę oczek ze zbioru $\{2,3,4,5\}$ – możliwe są $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ takie wyniki,
- otrzymamy raz jedno oczko i dwa razy sześć oczek; możliwe są 3 takie wyniki,
- otrzymamy dwa razy jedno oczko i raz sześć oczek; możliwe są 3 takie wyniki.

Stąd $|A \cap B| = 30$ i $P(A\,|\,B) = \frac{30}{91}$

Uwaga:

$|A \cap B|$ można obliczyć korzystając z prawa de Morgana.

$$|A\cap B| = \left|\left((A\cap B)'\right)'\right| = |\Omega| - |A'\cup B'| = |\Omega| - \left(|A'| + |B'| - |A'\cap B'|\right) =$$

$$= 6^3 - \left(5^3 + 5^3 - 4^3\right) = 30$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zapisanie wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe przy poprawnie wprowadzonych oznaczeniach.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Obliczenie $|B| = 91$ lub $P(B)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Obliczenie $|A\cap B| = 30$ lub $P(A\cap B)$.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 p.

Rozwiązanie zadania do końca z błędami rachunkowymi.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

Obliczenie $P(A\,|\,B) = \frac{30}{91}$.

Zadanie 17. (0–6)

Dany jest okrąg o_0 o równaniu $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$. W pierwszej „ćwiartce” układu współrzędnych istnieją dwa okręgi o_1, o_2 styczne zewnętrznie do okręgu o_0 i jednocześnie styczne do obu osi układu współrzędnych. Oblicz odległość środków okręgów o_1 oraz o_2.

IV. Użycie i tworzenie strategii	R8.5. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności.

Rozwiązanie:

Okrąg o równaniu $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ ma środek w punkcie $(3,1)$ i promień 1. Z treści zadania wynika, że okręgi o_1, o_2 leżą w pierwszej „ćwiartce” układu współrzędnych. Równanie okręgu leżącego w I „ćwiartce” układu współrzędnych i stycznego do obu osi układu jest postaci

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2, \text{ gdzie } r > 0.$$

Zapisujemy warunek styczności okręgów. Okręgi są styczne zewnętrznie, czyli odległość środków tych okręgów jest równa sumie ich promieni, zatem

$$\sqrt{(r-3)^2 + (r-1)^2} = r + 1.$$

Przekształcając to równanie, otrzymujemy równanie $r^2 - 10r + 9 = 0$, które ma dwa rozwiązania $r_1 = 1,\ r_2 = 9$.

Środki S_1, S_2 okręgów o_1, o_2 mają współrzędne $S_1 = (1,1)$, $S_2 = (9,9)$ i ich odległość jest równa $8\sqrt{2}$.

<u>Schemat oceniania:</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zapisanie, że okrąg o równaniu $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ ma środek w punkcie $(3,1)$ i promień 1.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zapisanie postaci równania okręgu leżącego w I „ćwiartce" układu współrzędnych i stycznego do obu osi układu jest postaci $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$, gdzie $r > 0$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zapisanie równania wynikającego z warunku styczności okręgów

$$\sqrt{(r-3)^2 + (r-1)^2} = r + 1$$

Rozwiązanie prawie pełne .... 5 p.

Rozwiązanie pełne .... 6 p.

Obliczenie odległości środków okręgów: $8\sqrt{2}$.

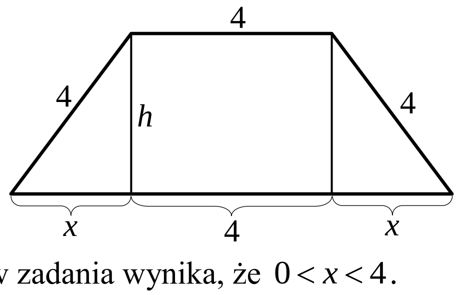
Zadanie 18. (0–7)

Okno na poddaszu ma mieć kształt trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa i ramiona mają długość po 4 dm. Oblicz, jaką długość powinna mieć dłuższa podstawa tego trapezu, aby do pomieszczenia wpadało przez to okno jak najwięcej światła, czyli aby pole powierzchni okna było największe. Oblicz to pole.

V. Rozumowanie i argumentacja	R11.6. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Rozwiązanie (I sposób):

Niech x oznacza długość rzutu prostokątnego ramienia trapezu na prostą zawierająca dłuższą podstawę trapezu, a h – wysokość trapezu.



Z geometrycznych warunków zadania wynika, że $0 < x < 4$.

Przy tak przyjętych oznaczeniach pole trapezu jest określone wzorem:

$$P = \frac{2 \cdot 4 + 2x}{2} \cdot h = (4 + x) \cdot h \quad \text{i} \quad 0 < x < 4$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$x^2+h^2=4^2,$$

stąd $h=\sqrt{16-x^2}$.

Pole trapezu, w zależności od zmiennej *x*, jest określone wzorem:

$$P(x)=(4+x)\sqrt{16-x^2}=\sqrt{(4+x)^2\left(16-x^2\right)}=$$
$$=\sqrt{(4+x)^3(4-x)}=\sqrt{-x^4-8x^3+128x+256}$$

gdzie $0<x<4$.

Należy obliczyć, dla jakiego *x* spełniającego nierówność $0<x<4$, funkcja *P* określona wzorem $P(x)=\sqrt{-x^4-8x^3+128x+256}$ przyjmuje wartość największą.

Funkcja *P* osiąga wartość największą, gdy funkcja $f(x)=-x^4-8x^3+128x+256$ osiąga w przedziale $(0,4)$ wartość największą. Wystarczy więc zbadać funkcję *f*. Wyznaczmy pochodną tej funkcji

$$f'(x)=-4x^3-24x^2+128$$

Następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej: $x_1=x_2=-4$, $x_3=2$

Ponadto:

- $f'(x)>0$ w przedziale $(0,2)$,
- $f'(x)<0$ w przedziale $(2,4)$

Zatem funkcja *f* jest rosnąca w przedziale $(0,2\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 2,4)$.

Ponieważ $P(x)=\sqrt{f(x)}$ dla $x\in(0,4)$, więc funkcja *P* jest rosnąca w przedziale $(0,2\rangle$, a malejąca w przedziale $\langle 2,4)$. Stąd wynika, że w punkcie $x=2$ funkcja *P* przyjmuje wartość największą.

Gdy $x=2$, to $2x+4=8$, czyli dłuższa podstawa trapezu ma długość 8, a pole tego trapezu jest wówczas równe

$$P(2)=(4+2)\cdot\sqrt{16-2^2}=6\cdot 2\sqrt{3}=12\sqrt{3}.$$

Odpowiedź: Największe pole, równe $12\sqrt{3}$ dm^2, ma szyba w kształcie trapezu, którego dłuższa podstawa ma długość 8 dm.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania:

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap składa się z trzech części:

a) wybór zmiennej *x* (długość rzutu prostokątnego ramienia trapezu na prostą zawierająca dłuższą podstawę trapezu) i zapisanie za pomocą tej zmiennej wysokości trapezu: $h=\sqrt{16-x^2}$

b) zapisanie pola trapezu w zależności od zmiennej *x*: $P(x)=(4+x)\sqrt{16-x^2}$

c) określenie dziedziny funkcji *P*: $(0,\ 4)$

Zdający może otrzymać maksymalnie po **1 punkcie** za realizację każdej z części tego etapu, przy czym dziedzina funkcji nie może wynikać jedynie z wyznaczonego wzoru funkcji, ale z geometrycznych warunków zadania.

Drugi etap składa się z trzech części:

a) wyznaczenie pochodnej funkcji wielomianowej $f(x) = -x^4 - 8x^3 + 128x + 256$:
$f'(x) = -4x^3 - 24x^2 + 128$,

b) obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $x_1 = x_2 = -4$, $x_3 = 2$,

c) uzasadnienie (np. przez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja P osiąga wartość największą w punkcie $x = 2$.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje 1 punkt, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

Trzeci etap.

Obliczenie pola trapezu dla $x = 2$: $P(2) = 12\sqrt{3}$.

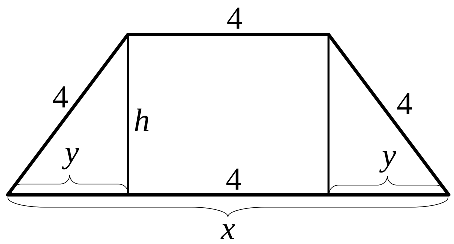
Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje 1 punkt.

Uwaga:

Punkt za trzeci etap przyznajemy tylko w przypadku, gdy zdający wyznaczył poprawnie $x = 2$.

Rozwiązanie (II sposób):

Niech x oznacza długość dłuższej podstawy trapezu, a h – wysokość trapezu.



Długość y rzutu prostokątnego ramienia trapezu na prostą zawierająca dłuższą podstawę trapezu jest wówczas równa $y = \frac{x-4}{2}$.

Z geometrycznych warunków zadania wynika, że $4 < x < 12$.

Przy tak przyjętych oznaczeniach pole trapezu jest określone wzorem:

$$P = \frac{x+4}{2} \cdot h \quad \text{i} \quad 4 < x < 12$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$y^2 + h^2 = 4^2,$$

$$\left(\tfrac{x-4}{2}\right)^2 + h^2 = 4^2.$$

stąd $h = \sqrt{16 - \left(\frac{x-4}{2}\right)^2} = \sqrt{16 - \frac{x^2-8x+16}{4}} = \sqrt{\frac{64-x^2+8x-16}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{-x^2+8x+48}$

Pole trapezu, w zależności od zmiennej x, jest określone wzorem:

$$P(x) = \frac{x+4}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{-x^2+8x+48} = \frac{1}{4}\sqrt{(x+4)^2\left(-x^2+8x+48\right)} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\left(x^2+8x+16\right)\left(-x^2+8x+48\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{-x^4+96x^2+512x+768}$$

gdzie $4 < x < 12$.

Należy obliczyć, dla jakiego *x* spełniającego nierówność $4 < x < 12$, funkcja *P* określona wzorem $P(x) = \frac{1}{4}\sqrt{-x^4 + 96x^2 + 512x + 768}$ przyjmuje wartość największą.

Funkcja *P* osiąga wartość największą, gdy funkcja $f(x) = -x^4 + 96x^2 + 512x + 768$ osiąga w przedziale $(4,12)$ wartość największą. Wystarczy więc zbadać funkcję *f*. Wyznaczmy pochodną tej funkcji

$$f'(x) = -4x^3 + 192x + 512$$

Następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej: $x_1 = x_2 = -4$, $x_3 = 8$.

Ponadto:

- $f'(x) > 0$ w przedziale $(4,8)$
- $f'(x) < 0$ w przedziale $(8,12)$

Zatem funkcja *f* jest rosnąca w przedziale $(4,8\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 8,12)$.

Ponieważ $P(x) = \frac{1}{4}\sqrt{f(x)}$ dla $x \in (4,12)$, więc funkcja *P* jest rosnąca w przedziale $(4,8\rangle$, a malejąca w przedziale $\langle 8,12)$. Stąd wynika, że w punkcie $x = 8$ funkcja *P* przyjmuje wartość największą.

Dla $x = 8$ pole tego trapezu jest równe

$$P(8) = \frac{4+8}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{-8^2 + 8\cdot 8 + 48} = 3\sqrt{48} = 12\sqrt{3}$$

Odpowiedź.: Największe pole, równe $12\sqrt{3}$ dm^2, ma szyba w kształcie trapezu, którego dłuższa podstawa ma długość 8 dm.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania:

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap składa się z trzech części:

a) wybór zmiennej *x* (długość dłuższej podstawy trapezu) i zapisanie za pomocą tej zmiennej wysokości trapezu: $h = \sqrt{16 - \left(\frac{x-4}{2}\right)^2}$

b) zapisanie pola trapezu w zależności od zmiennej *x*: $P(x) = \frac{x+4}{4} \cdot \sqrt{-x^2 + 8x + 48}$

c) określenie dziedziny funkcji *P*: $(4, 12)$.

Zdający może otrzymać maksymalnie po 1 punkcie za realizację każdej z części tego etapu, przy czym dziedziną funkcji nie może wynikać jedynie z wyznaczonego wzoru funkcji, ale z geometrycznych warunków zadania.

Drugi etap składa się z trzech części:

a) wyznaczenie pochodnej funkcji wielomianowej $f(x) = -x^4 + 96x^2 + 512x + 768$:
$f'(x) = -4x^3 + 192x + 512$,

b) obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $x_1 = x_2 = -4$, $x_3 = 8$,

c) uzasadnienie (np. przez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja *P* osiąga wartość największą w punkcie $x = 8$.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje 1 punkt, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

Trzeci etap.

Obliczenie pola trapezu dla $x=8$: $P(8)=12\sqrt{3}$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje 1 punkt.

Uwaga:

Punkt za trzeci etap przyznajemy tylko w przypadku, gdy zdający wyznaczył poprawnie $x=8$.